

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις - Προόδος II

Τετάρτη 27-5-2015, 2-4 μ.μ.

1. Να επιλυθεί το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 + y_3 + x \\y_2' &= -y_2 + y_3 - 1 \\y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 + x^2.\end{aligned}$$

2. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$xy'' + (1-x)y' + my = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

- (i) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση έχει μια πολυωνυμική λύση L_m γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.
- (ii) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία πολυωνύμων $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ είναι ορθογώνια στο $[0, \infty)$ ως προς την συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x}$.

3. Να βρεθούν οι λύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$yz_x + z_y = 2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

οι οποίες πληρούν την συνθήκη

$$z(y^2/2, y) = 2y.$$

4. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + \frac{1}{4x^2}y = f(x)\cos x, \quad x > 0$$

όπου $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Για $f(t) = \cos^3 t$ να εξετασθεί αν υπάρχει μη ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης για $x \rightarrow \infty$.